《目次》

第１講　　総合演習（その１）……………………… 2

第２講　　総合演習（その２）……………………… 4

第３講　　総合演習（その３）……………………… 6

第４講　　総合演習（その４）……………………… 8

《第１講　総合演習（その１）》

1 以下の問い（問１～３）に答えよ．

問１　複素数に関する以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1)　複素数 $z=x+iy$ (x，y は実数)の共役複素数を $\bar{z}$ とする．x と y を z と $\bar{z}$ を用いて表せ．

(2)　(1)の複素数 z の絶対値を x と y を用いて表せ．

(3)　方程式 $z^3=8$ の３つの解を求めよ．

(4)　任意の自然数 n に対して次式が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

問２　以下の定積分を計算せよ．

(1)　$\displaystyle\int_0^1 e^{-x}dx$

(2)　$\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx$

(3)　$\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}dx$

問３　点Ｐの位置ベクトルの成分 x，y，z が時刻 t を媒介変数として

$$x(t)=t^3+t,\ \ y(t)=\sqrt{3}\,t^2,\ \ z(t)=2\sqrt{2}\,t$$

で表されている．

(1)　時刻 t における点Ｐの速度ベクトル $\vec{v}$ の成分と大きさを求めよ．

(2)　時刻 t における点Ｐの加速度ベクトル $\vec{a}$ の成分と大きさを求めよ．

(3)　点Ｐが時刻 $t=0$ から $t=1$ までに移動した道のり(軌道の長さ) s を求めよ．

2　関数 $f(x)$ は第 2 次導関数をもち，すべての実数 x に対して $f''(x) \geqq 0$ を満たすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　実数 x と a に対して，不等式

$$f(x) \geqq f(a) + f'(a)(x-a)$$

が成り立つことを示せ．

(2)　関数 $g(t)$ は $0 \leqq t \leqq 1$ で連続であるとする．このとき，問 1 において $x=g(t)$，$a=\int_0^1 g(s)\,ds$ とおくことにより，不等式

$$\int_0^1 f(g(t))\,dt \geqq f\left(\int_0^1 g(s)\,ds\right)$$

が成り立つことを示せ．

テキスト解答

《第１講　総合演習(その１)》

1　以下の問い（問１～３）に答えよ．

問１　複素数に関する以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1)　複素数 $z=x+iy$ (x, y は実数)の共役複素数を $\overline{z}$ とする．x と y を z と $\overline{z}$ を用いて表せ．

(2)　(1)の複素数 z の絶対値を x と y を用いて表せ．

(3)　方程式 $z^3=8$ の３つの解を求めよ．

(4)　任意の自然数 n に対して次式が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

問２　以下の定積分を計算せよ．

(1)　$\displaystyle\int_0^1 e^{-x}dx$

(2)　$\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx$

(3)　$\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}dx$

問３　点Ｐの位置ベクトルの成分 x, y, z が時刻 t を媒介変数として

$$x(t)=t^3+t,\ y(t)=\sqrt{3}\,t^2,\ z(t)=2\sqrt{2}\,t$$

で表されている．

(1)　時刻 t における点Ｐの速度ベクトル $\vec{v}$ の成分と大きさを求めよ．

(2)　時刻 t における点Ｐの加速度ベクトル $\vec{a}$ の成分と大きさを求めよ．

(3)　点Ｐが時刻 $t=0$ から $t=1$ までに移動した道のり(軌道の長さ) s を求めよ．

【答】　問１　(1)　$x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$　(2)　$\sqrt{x^2+y^2}$　(3)　$z=2,\ -1\pm\sqrt{3}\,i$　(4)　略

問２　(1)　$1-\dfrac{1}{e}$　(2)　$1-\dfrac{2}{e}$　(3)　$\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$

問３　(1)　$\vec{v}=\left(3t^2+1,\ 2\sqrt{3}\,t,\ 2\sqrt{2}\right)$, $|\vec{v}|=3(t^2+1)$

(2)　$\vec{a}=\left(6t,\ 2\sqrt{3},\ 0\right)$, $|\vec{a}|=2\sqrt{9t^2+3}$　(3)　4

【解説】　問１　(1)　$z=x+iy$ より $\overline{z}=x-iy$ なので，$z+\overline{z}=2x$．よって $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$．

また，$z-\overline{z}=2iy$．よって $y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$．

(2)　$|z|^2=z\overline{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$ なので $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$．

(3)　$z^3=8 \iff (z-2)(z^2+2z+4)=0$ なので $z=2,\ -1\pm\sqrt{3}\,i$.

(4)　$n=1$ のとき，(左辺)$=\cos 1\theta+i\sin 1\theta=\cos\theta+i\sin\theta$,

(右辺)$=(\cos\theta+i\sin\theta)^1=\cos\theta+i\sin\theta$ となるので，与式は成立する．

$n=k(\geqq 1)$ のとき $\cos k\theta+i\sin k\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^k$ が成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta+i\sin\theta)^k\,(\cos\theta+i\sin\theta)\\ &= (\cos k\theta+i\sin k\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)\\ &= \cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta+i(\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta)\\ &= \cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta\end{aligned}$$

より $n=k+1$ のときにも与式が成り立つ.

以上より，数学的帰納法により $\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ が示された.

問２　(1)　$\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx=\Big[-e^{-x}\Big]_0^1=1-\frac{1}{e}$

(2)　$\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx=\Big[-(x+1)e^{-x}\Big]_0^1=1-\frac{2}{e}$

(3)　$\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx=\Big[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big]_0^1=\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{e}\Big)$

問３　(1)　$x'(t)=3t^2+1$，$y'(t)=2\sqrt{3}\,t$，$z'(t)=2\sqrt{2}$ なので $\vec{v}=\big(3t^2+1,\ 2\sqrt{3}\,t,\ 2\sqrt{2}\big)$ であり

$$\begin{aligned}|\vec{v}| &= \sqrt{(3t^2+1)^2+\big(2\sqrt{3}\,t\big)^2+\big(2\sqrt{2}\,\big)^2}\\ &= \sqrt{9(t^2+1)^2}\\ &= 3(t^2+1)\end{aligned}$$

(2)　$x''(t)=6t$，$y''(t)=2\sqrt{3}$，$z''(t)=0$ なので $\vec{a}=\big(6t,\ 2\sqrt{3},\ 0\big)$ であり

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= \sqrt{(6t)^2+\big(2\sqrt{3}\,\big)^2+0^2}\\ &= \sqrt{12(3t^2+1)}\\ &= 2\sqrt{9t^2+3}\end{aligned}$$

(3)　(1)より $|\vec{v}|=3(t^2+1)$ なので

$$\begin{aligned}s &= \int_0^1|\vec{v}|\,dt\\ &= \int_0^1\{3(t^2+1)\}\,dt\\ &= \Big[t^3+3t\Big]_0^1\\ &= 4\end{aligned}$$

2　関数 $f(x)$ は第 2 次導関数をもち，すべての実数 x に対して $f''(x) \geqq 0$ を満たすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　実数 x と a に対して，不等式

$$f(x) \geqq f(a) + f'(a)(x-a)$$

が成り立つことを示せ．

(2)　関数 $g(t)$ は $0 \leqq t \leqq 1$ で連続であるとする．このとき，問 1 において $x = g(t)$, $a = \int_0^1 g(s)\,ds$ とおくことにより，不等式

$$\int_0^1 f(g(t))\,dt \geqq f\left(\int_0^1 g(s)\,ds\right)$$

が成り立つことを示せ．

【答】 (1)　略　　(2)　略

【解説】 (1)　$h(x) = f(x) - \{f(a) + f'(a)(x-a)\}$ とおくと

$h(x) = f(x) - f'(a)x + af'(a) - f(a)$ より

$h'(x) = f'(x) - f'(a)$, $h''(x) = f''(x) \geqq 0$ であり，$h'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$ なので

$x \leqq a$ のとき $h'(x) \leqq 0$, $x \geqq a$ のとき $h'(x) \geqq 0$ となる．

よって $h(x) \geqq h(a) = 0$ より $f(x) \geqq f(a) + f'(a)(x-a)$ が示された．

(2)　(1)の結果より $f(g(t)) \geqq f(a) + f'(a)(g(t) - a) = f'(a)g(t) + f(a) - af'(a)$ であるので

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(g(t))\,dt &\geqq \int_0^1 \{f'(a)g(t) + f(a) - af'(a)\}\,dt \\
&= f'(a)\int_0^1 g(t)\,dt + (f(a) - af'(a))\int_0^1 dt \\
&= f'(a) \times a + (f(a) - af'(a)) \times 1 \\
&= f(a) \\
&= f\left(\int_0^1 g(s)\,ds\right)
\end{aligned}$$

よって与えられた不等式が示された．